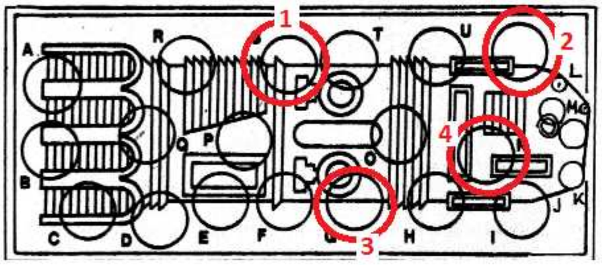
1 Vorschule

Lösung 82-11



Lösung 82-12

a) Hans kann nur einen einzigen Strauß binden: eine Rose, eine Tulpe, eine Lilie.

b) Hans kann 10 verschiedene Sträuße binden

1. von jeder Sorte 3 Blumen: Rose, Rose Rose oder Tulpe, Tulpe, Tulpe oder Lilie, Lilie, Lilie. Das sind 3 verschiedene Sträuße.

2. von jeder Sorte 2 Blumen und eine dritte von einer anderen Sorte: 2 Rosen, eine Tulpe oder 2 Rosen, eine Lilie oder 2 Tulpen, eine Rose oder 2 Tulpen, eine Lilie oder 2 Lilien, eine Rose oder 2 Lilien, eine Tulpe. Das sind 6 verschiedene Sträuße.

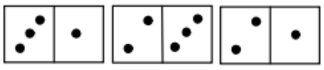
3. von jeder Sorte eine Blume: 1 Rose, 1 Tulpe, 1 Lilie. Das ist ein weiterer Strauß.

Lösung 82-13

Pia hat 17 Ostereier gefunden, Leo 18.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 82-21



Lösung 82-22

Wenn das erste Kaninchen eine Karotte gefressen hätte, hätten die anderen Kaninchen 2, 3, 4, 5, 6 und 7 Karotten gefressen. Das sind zusamen 28 Karotten. Es fehlen daher noch 21 Karotten. Nun ist 21 : 7 = 3. Wenn also jedes Kaninchen 3 Karotten mehr gefressen hätte, wären es genau 49 Karotten.

Das erste Kaninchen hat also 4 Karotten gefressen.

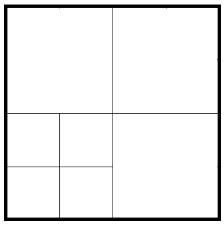
Probe: alle Kaninchen zusammen haben dann $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 49$ Karotten gefressen.

Lösung 82-23

Juri muss dieeinstellige Zahl stets 11 Mal addieren, um die zweistellige Zahl zu erhalten:

$$\begin{aligned} 1 &\Rightarrow 11\,;\ 11 = 11 \cdot 1 \\ 2 &\Rightarrow 22\,;\ 22 = 11 \cdot 2 \\ 3 &\Rightarrow 33\,;\ 33 = 11 \cdot 3 \\ \ldots \end{aligned}$$

Lösung 82-24



Wenn Anton das Papier wieder auseinander faltet, sieht es so wie in der Zeichnung aus. Anton hat die Länge der Seite eines der kleinsten Quadrate gemessen. Die Seite des großen Quadrats ist viermal so lang wie die Seite eines kleinen Quadrats. Das quadratische Papier hatte also die Seitenlänge 16 cm.

3 Klassen 3 und 4

Lösung 82-31

Die kleinste mögliche Summe ist 3, die größte 15. Man kann die Zahlen von 3 bis 15 jeweils in 3 Faktoren zerlegen und prüfen, ob deren Produkt gleich dieser Zahl ist. Die Primzahlen kann man dabei außer Acht lassen, denn die einzige Zerlegung in 3 Faktoren ist die Zahl selbst mit $1 \cdot 1$ multipliziert. Die Summe dieser Zahlen ist dann immer um 2 größer als das Produkt. Man muss also nur noch 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 untersuchen. Von diesen lässt sich nur 6 so zerlegen, dass sie Summe gleich dem Produkt der 3 Zahlen ist:

$$6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Lösung 82-32

Wegen (2) ist schon einmal klar, dass Andreas Fadelmann heißt und somit nur noch die Nachnamen Eckbart, Gänsich und Hermhaus frei sind. Wegen (1) und (3) heißt Claus nicht Gänsich und nicht Hermhaus, muss also Eckbart heißen. Wegen (1) heißt auch Bernd nicht Gänsich, also muss er Hermhaus heißen. Folglich muss Daniel Gänsich heißen.

Die Namen lauten also:

Andreas	Fadelmann
Bernd	Hermhaus
Claus	Eckbart
Daniel	Gänsich

Lösung 82-33

Die Melone wiegt 3000 g.

$(3000 = 1500 + 3000 : 2)$

Lösung 82-34

62715916

4 Klassen 5 und 6

Lösung 82-41

Würfel 4.

Lösung 82-42

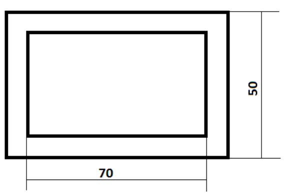
Das Wassevolumen in jeder Tonne ist das Produkt aus Grundfläche und Höhe. Da beide Höhen gleich sind, muss der Flächeninhalt der Grundfläche der größeren Tonne viermal so groß sein, wie der Flächeninhalt der Grundfläche der kleineren Tonne. Wenn ein Quadrat einen viermal so großen Flächeninhalt hat, wie ein anderes Quadrat, dann ist die Seite des größeren Quadrats doppelt so lang wie die des kleineren Quadrats. Analog ist der Durchmesser der größeren Tonne doppelt so lang wie der der kleineren Tonne. Die Durchmesser der beiden Tonnen verhalten sich also wie 2 : 1.

Lösung 82-43

Mit Weg hat das Rasenstück die Länge 74 Meter und die Breite 3700 : 74 = 50 Meter. Läuft man auf der Mitte des Weges um das Rasenstück herum, so legt man also (Maßangaben in m)

$$2 \cdot (70 + 2 + 50 - 2) = 2 \cdot 120 = 240$$

Meter.



Lösung 82-44

Es sei $\overline{abcd}$ die Dezimaldarstellung der gesuchten Zahl, also a sei die Ziffer an der Tausenderstelle, b die an der Hunderterstelle usw. Da es eine vierstellige Zahl sein soll, ist $a = 0$ ausgeschlossen. Es gilt also $0 < a \leq 9$ und $0 \leq b, c, d \leq 9$ sowie

$$a + b + c + d = 14 \quad (1)$$
$$a + d = b \quad (2)$$
$$a \cdot d = b \quad (3)$$

Nun haben wir zwei Möglichkeiten, weiter zu schießen:

Variante 1: Die Gleichungen (2) und (3) werden einzig von $a = d = 2$ und $b = 4$ erfüllt, da 22 die einzige zweistellige natürliche Zahl ist, deren Quersumme gleich ihrem Querprodukt ist. Dies muss natürlich noch bewiesen werden. Zum Beweis können wir die Lösung zu Aufgabe 80-21 aus Serie 80 heranziehen. Dann muss wegen (1) $c = 6$ sein.

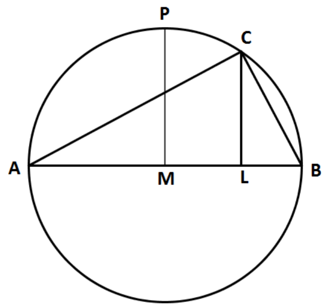
Variante 2: Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir $2 \cdot b + c = 14$ oder $2 \cdot b = 14 - c$. Auf der linken Seite dieser Gleichung steht eine gerade Zahl. daher muss c ebenfalls gerade sein, also $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Für $c \in \{0, 4, 8\}$ ergeben sich für b die Primzahlen $b \in \{7, 5, 3\}$, die sich nur in das Produkt aus 1 und sich selbst zerlegen lassen. Für diese Faktoren ist die Summe also größer als das Produk. Für $c = 2$ ergibt sich $b = 6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$. Auch hier sind Summe und Produkt der Faktoren voneinander verschieden. Für $c = 6$ erhalten wir $b = 4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$ und $2 \cdot 2 = 2 + 2$. Daher muss $c = 6$ gelten und wir erhalten $a = d = 2$ und $b = 4$- das gleiche Resultat wie in Variante 1.

Die einzige vierstellige Zahl, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, ist 2462.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 82-51

Nach Satz des Thales liegt der Punkt C des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ auf dem Kreis um den Mittelpunkt M der Hypothenuse AB mit Durchmesser $\mid AB \mid$. Es seien P der Schnittpunkt der Senkrechten auf die Hypothenuse AB durch M mit dem Kreis und L der Fußpunkt des Lotes von C auf die Hypothenuse AB. Die Strecke PM ist damit genau halb so lang wie die Hypothenuse AB: $\mid PM \mid = \frac{c}{2}$.



Die Länge des Lots CL wird maximal, wenn C mit P zusammenfällt. Das ist genau dann der Fall, wenn das gegebene rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig ist. Für jedes nicht gleichschenklige Rechtwinklige Dreieck ABC gilt folglich

$$\mid CL \mid < \mid PM \mid = \frac{c}{2}$$

w.z.b.w.

Lösung 82-52

Wegen $AB \parallel CD$ gilt nach den Strahlensätzen

$$DE : AF = EM : AM = 1 : 3$$

$$EC : FB = EN : BN = 1 : 3$$

also $CD \parallel MN$ und daher $AB \parallel MN$. Daraus folgt weiter

$$\frac{AB}{MN} = \frac{EA}{EM} = \frac{EM + AM}{EM} = 1 + \frac{AM}{EM} = 1 + 3 = 4$$

Also

$$\frac{MN}{AB} = \frac{1}{4},\ MN = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}a$$

Die Länge der Strecke MN ist also gleich $a/4$.

Lösung 82-53

Auf keinen Fall kann $a = 0$ oder $b = 0$ gelten, da der Term auf der linken Seite der Ungleichung im ersten Fall gleich 0, im zweiten Fall nicht definiert wäre. Es ist also $c = 0$ und die Ungleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{a \cdot (-b)}{b} = -a > 0$$

Somit muss a negativ sein und b positiv.

Lösung 82-54

Es ist $987654321 \cdot 98765432 = 97546105680231672$. Wegen $987654323 = 987654321 + 2$ ist $[987654321 \cdot 98765432, 98765432 \cdot 987654323]$ ein Intervall der Länge $2 \cdot 98765432$. Also ist die obere Intervallgrenze gleich

$$987654323 \cdot 98765432 = 97546105680231672 + 2 \cdot 98765432 = 97546105877762536.$$

Alle natürlichen Zahlen n mit

$$97546105680231673 \leq n \leq 97546105877762535$$

erfüllen also die gegebene Ungleichung.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 82-61

Zunächst lässt sich die gegebene Ungleichung äquivalent umformen in

$$\left(\frac{ab}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{cd}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}} \leq 1.$$

Durch Aufspaltung und Erweitern erhält man

$$\begin{aligned}\frac{ab}{(a+c+b)(a+c+d)} &= \frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+c}{a+c+d}\cdot\frac{b}{a+c+b},\\ \frac{cd}{(a+c+b)(a+c+d)} &= \frac{c}{a+c}\cdot\frac{a+c}{a+c+b}\cdot\frac{d}{a+c+d}.\end{aligned}$$

Die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel liefert jetzt

$$\begin{aligned}3\cdot\left(\frac{ab}{(a+c+b)(a+c+d)}\right)^{1/3} &\leq \frac{a}{a+c}+\frac{a+c}{a+c+d}+\frac{b}{a+c+b},\\ 3\cdot\left(\frac{cd}{(a+c+b)(a+c+d)}\right)^{1/3} &\leq \frac{c}{a+c}+\frac{a+c}{a+c+b}+\frac{d}{a+c+d}.\end{aligned}$$

Summiert man hier die linken bzw. rechten Seiten, erhält man die Behauptung.

Lösung 82-62

Die Behauptung ist äquivalent mit

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \geq 11 \quad\Rightarrow\quad k^4 < 2^{k+\sqrt{k}}),$$

und dies wird durch vollständige Induktion gezeigt.

Induktionsanfang: Für $k = 11$ gilt $11^4 = 14641 < 16384 = 2^{14} < 2^{11+\sqrt{11}}$.
Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $k \geq 11 \quad\Rightarrow\quad k^4 < 2^{k+\sqrt{k}}$.
Zu zeigen: Dann gilt auch $(k+1)^4 < 2^{k+1+\sqrt{k+1}}$.

$$\begin{aligned}2^{k+1+\sqrt{k+1}} &> 2^{k+1+\sqrt{k}}\\ &= 2\cdot 2^{k+\sqrt{k}}\\ &> 2\cdot k^4\\ &\geq (k+1)^4 \quad \text{für jedes } k\in\mathbb{N} \text{ mit } k\geq 11;\end{aligned}$$

denn die letzte Ungleichheit gilt wegen

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \geq 6 \quad\Rightarrow\quad 2k^4 > (k+1)^4),$$

und dies ist wiederum äquivalent mit

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k \geq 6 \quad \Rightarrow \quad (k+1)^2 < \sqrt{2}\cdot k^2),$$

wie nochmals durch vollständige Induktion gezeigt wird.
Induktionsanfang: $(6+1)^2 = 7^2 = 49 < 50,4 = 6^2 \cdot \frac{14}{10} < 6^2\sqrt{2}$.
Induktionsschritt: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $k \geq 6 \quad \Rightarrow \quad (k+1)^2 < \sqrt{2}\cdot k^2$.
Zu zeigen: Dann gilt auch $(k+1)^2 < \sqrt{2}(k+1)^2$.

$$\begin{aligned}
(k+2)^2 &= ((k+1)+1)^2 \\
&= (k+1)^2 + 2(k+1) + 1 \\
&< \sqrt{2}\cdot k^2 + (2k+3) \\
&< \sqrt{2}\cdot k^2 + (2\sqrt{2}\cdot k + \sqrt{2}) \qquad (*) \\
&= \sqrt{2}(k^2+2k+1) \\
&= \sqrt{2}(k+1)^2.
\end{aligned}$$

Begründung von (*): $2k+3 < 2\sqrt{2}\cdot k + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3-\sqrt{2} < 2k(\sqrt{2}-1)$, und die rechte Ungleichung gilt wegen

$$3-\sqrt{2} < \frac{8}{5} < 2k\cdot\frac{2}{5} < 2k(\sqrt{2}-1)$$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$. Damit ist alles bewiesen.

Lösung 82-63

Ein Ereignis wird beschrieben durch ein geordnetes Tripel $(a;b;c)$ mit $a,b,c \in \mathbb{N}, 1 \leq a,b,c \leq 6$. Es gibt also insgesamt $6\cdot 6\cdot 6 = 216$ mögliche Ereignisse. Die jeweilige Wahrscheinlichkeit erhalten wir als Quotient aus der Anzahl der jeweils günstigen Ereignissen und 216.

2: Da man mindestens eine Gesamtaugenzahl 3 würfelt, ist die Wahrscheinlichkeit 0.

3: Nur wenn man $(1;1;1)$ würfelt, erhält man die Augenzahl 3. Die Wahrscheinlichkeit ist also 1/216.

16: Diese Gesamtaugenzahl erhält man bei insgesamt 6 verschiedenen Würfelergebnissen: $(4;6;6), (6;4;6), (6;6;4), (5;5;6), (5;6;5)(6;5;5)$. Die Wahrscheinlichkeit, 16 zu würfeln, ist also gleich $6/216 = 1/36$.

17: Diese Gesamtaugenzahl erhält man, bei jedem der Würfelereignisse $(6;6;5), (6;5;6)$ oder $(5;6;6)$. Die Wahrscheinlichkeit ist also gleich $3/216 = 1/72$.

18: Analog zu 3 gibt es nur ein einziges günstiges Ereignis: $(6;6;6)$. Die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 18 beträgt also 1/216.