1 Vorschule

Lösung 59-11

Sie reichen nicht. Er braucht einen Kasten mit 24 Farben.

Lösung 59-12

Anja	7	Lars	5
Finn	3	Lucy	8

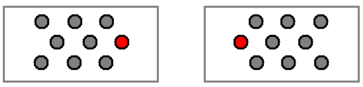
Lösung 59-13

Erster wurde Enrico, Zweite Clara, Dritte Anna, Vierter Dominik und Fünfter Ben.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 59-21

Es reicht, eine einzige Münze zu verschieben:



Lösung 59-22

Die Dreiecke haben 12 Ecken, die Quadrate 8 Ecken und das Fünfeck 5 Ecken. Das sind zusammen 25 Ecken.

Lösung 59-23

Wegen $45+81=126$ wurden $126-96=30$ Urkunden doppelt gezählt. Dies sind die Siegerurkunden.

Es gab also $45-30=15$ Ehrenurkunden, 30 Siegerurkunden und $81-30=51$ Teilnehmerurkunden.

Lösung 59-24

Maria, Klara, Laura, Susi, Sabine, Petra

3 Klassen 3 und 4

Lösung 59-31

$$9999 - 999 = 9000$$

Lösung 59-32

Sabrina kann alle Augenzahlen von 4 bis 12 gewürfelt haben. Für jede Augenzahl von Sabrina ergeben sich als mögliche Augenzahlen von Patricia die Zahlen von 3 bis zum Vorgänger der Augenzahl von Sabrina und die Gesamtaugenzahl als Summe dieser beiden Zahlen:

Sabrina	Sabrina + Patricia								
4	**7**	-	-	-	-	-	-	-	-
5	**8**	**9**	-	-	-	-	-	-	-
6	9	**10**	**11**	-	-	-	-	-	-
7	10	11	**12**	**13**	-	-	-	-	-
8	11	12	13	**14**	**15**	-	-	-	-
9	12	13	14	15	**16**	**17**	-	-	-
10	13	14	15	16	17	**18**	**19**	-	-
11	14	15	16	17	18	19	**20**	**21**	-
12	15	16	17	18	19	20	21	**22**	**23**

Die möglichen verschiedenen Gesamtaugenzahlen sind fett geschrieben. Es sind insgesamt 17.

Lösung 59-33

Hätten Selina und Justus die Hefte und Blöcke gemeinsam gekauft, dann hätten sie zusammen für 6 Hefte und 6 Bleitifte 440 ct + 160 ct = 600 ct bezahlt. Also kosten ein Heft und ein Block zusammen 100 ct. Zwei Hefte und zwei Blöcke kosten zusammen 200 ct. Da Justus ein Heft und 2 Blöcke für 160 ct kauft, muss das Heft 40 ct kosten, ein Block folglich 60 ct.

Probe: Justus bezahlt 40 ct $+ 2 \cdot 60$ ct $= 160$ ct

Selina bezahlt $5 \cdot 40$ ct $+ 4 \cdot 60$ ct $= 200$ ct $+ 240$ ct $= 440$ ct .

Lösung 59-34

a)	243	214	185	156	127	**98**	**69**	40	immer - 29
b)	37	54	46	63	55	**72**	**64**	81	immer + 17, -8
c)	5	10	15	30	35	**70**	**75**	150	abwechselnd ·2,+5

Lösung 59-35

Ina Menzerath, 10 Jahre, Klasse 5:

Je Mahlzeit bekommt jeder Delfin $165 : 3 = 55$ Fische. Mittags hat jeder Delfin aber nur $55 - 10 = 45$ Fische gegessen. Zusammen sind das 135.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 59-41

Diese Aufgabe löst man am einfachsten rückwärts. Da Conrad 4 Pflaumen aß und dies $\frac{1}{3}$ der Pflaumen war, die er vorfand, hatte Ben 12 Pflaumen zurückgelassen. Da er $\frac{1}{3}$ der Pflaumen gegessen hat, als er die Schüssel sah, hat er $\frac{2}{3}$ der Pflaumen zurückgelassen. Er hat also 6 gegessen und vorher waren 18 in der Schüssel. Anton hatte also 18 Pflaumen übrig gelassen. Das sind $\frac{2}{3}$ aller Pflaumen, die anfangs in der Schüssel waren.

Die Mutter hatte also 27 Pflaumen auf den Tisch gestellt.

Probe:

a) Anton aß 9 Pflaumen und ließ 18 übrig.

b) Ben aß 6 Pflaumen und ließ 12 übrig.

c) Conrad aß 4 Pflaumen und ließ 8 übrig.

Lösung 59-42

Der Text deckt 26,4 h des Tages ab. Alexander kann so leben, da er einige Dinge parallel erledigt (essen, schreiben und lesen in der Schule).

Lösung 59-43

Sei x die Anzahl der Schüler, die der Lehrer unterrichtet, dann gilt

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

Diese Gleichung hat die Lösung $x = 36$. Folglich unterrichtet der Lehrer 36 Schüler.

Lösung 59-44

Angenommen, die Häuser stehen in der Reihenfolge A, B, C an der Straße. Dann muss die Halstestelle H genau vor Haus B eingerichtet werden.

Die Gesamtentfernung beträgt dann $\mid AB \mid + \mid BC \mid = \mid AC \mid$ und ist minimal.

Begründung: Angenommen, H liege außerhalb der Strecke AC, z.B. HABC (ABCH ist analog). Dann gilt

$$\mid HA \mid + \mid HB \mid + \mid HC \mid = 3 \mid HA \mid + \mid AB \mid + \mid AC \mid$$

und das ist größer als jede Gesamtentfernung im Fall AHBC. H muss also zwischen A und C liegen, z.B. AHBC. Dann beträgt die Gesamtentfernung der Häuser von H

$$\begin{aligned} \mid AH \mid + \mid HB \mid + \mid HC \mid &= \mid AB \mid - \mid HB \mid + \mid HB \mid + \mid HB \mid + \mid BC \mid \\ &= \mid AB \mid + \mid BC \mid + \mid HB \mid \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist genau dann minimal, wenn $\mid HB \mid = 0$ ist, also B = H.

Die minimale Gesamtentfernung ist gleich $\mid AB \mid + \mid BC \mid = \mid AC \mid$.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 59-51

Wir schreiben alle 100 Summen in eine Tabelle:

	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_{10}
a_1	a_1+b_1	a_1+b_2	a_1+b_3	$\cdots$	a_1+b_{10}
a_2	a_2+b_1	a_2+b_2	a_2+b_3	$\cdots$	a_2+b_{10}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{10}	$a_{10}+b_1$	$a_{10}+b_2$	$a_{10}+b_3$	$\cdots$	$a_{10}+b_{10}$

Nun ordnen wir die Zweiersummen dieser Tabelle nach folgendem Schema 10 Teilmengen zu, die wir der Einfachheit halber mit den Ziffern $1, \ldots, 10$ bezeichnen:
Jede dieser 10 Teilmengen enthält auf diese Weise genau alle gegebenen Zahlen $a_1, \ldots, a_{10}$, $b_1, \ldots, b_{10}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

als Summanden, d.h. die Summe aller Zahlen in jeder der 10 Teilmengen ist gleich $a_1 + \ldots + a_{10} + b_1 + \ldots + b_{10}$.

Lösung 59-52

Die Aussage ist wahr.

Beweis:

Sei $a = x^2 - y^2$ eine Darstellung von a als Differenz zweier Quadratzahlen. Dann gilt

$$a = (x-y)(x+y) = qr \text{ mit } q \leq r \tag{1}$$

Nach Voraussetzung ist

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n$$

mit n verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Aus der Menge der n Primzahlen kann man auf genau 2^n verschiedene Weisen Teilmengen (ggf. auch die die leere) auswählen. Jede Wahl entspricht einer Zerlegung der Zahl a in ein Produkt der Form (1), wobei das Produkt der gewählten Zahlen q ergibt, das der übrigen Zahlen r. Auf diese Weise werden jedoch alle Zerlegungen doppelt gezählt, so dass es 2^{n-1} Zerlegungen mit $q \leq r$ gibt.

Die Zahlen x und y ergeben sich für jede Wahl von q und r als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x-y &= q \\ x+y &= r \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{r+q}{2} \\ y &= \frac{r-q}{2} \end{aligned}$$

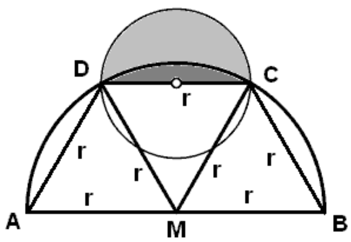
(Da a ungerade ist, sind auch die Faktoren q und r ungerade, so dass $x, y \in \mathbb{N}$ gilt.)

Lösung 59-53

Angenommen, Benni ist jetzt $b \in \mathbb{N}$ Jahre alt. Anton ist $36-b$ Jahre älter als Benni. Demnach war Anton vor $36-b$ Jahren so alt, wie Benni jetzt ist. Vor $36-b$ Jahren war Benni $b-(36-b) = 2b-36$ Jahre alt. Das ist ein Drittel von Antons jetzigem Alter, also $2b-36 = 12$ bzw. $b = 24$. Benni ist jetzt 24 Jahre alt.

Lösung 59-54

Nach Augenschein hat man vermutlich den Eindruck, das Trapez hätte einen größeren Flächeninhalt als die graue Fläche.
M sei der Mittelpunkt der Strecke AB, r sei der Radius des Halbkreises über AB. Der Flächeninhalt des Trapezes ist die Summe der Flächeninhalte dreier gleichseitiger Dreiecke mit Seitenlänge r.



Die dunkelgraue Fläche ist die Differenz der Fläche eines Sechstelkreises mit Radius r und der Fläche eines der genannten gleichseitigen Dreiecke. Bezeichnen wir den Flächeninhalt eines Dreiecks mit A_d, den eines Sechstelkreises mit A_{k6}, den eines Halbkreises mit Radius $\frac{r}{2}$ mit A_{k2}, den der dunkelgrauen Fläche mit A_g, den der hellgrauen Mondsichel mit A_m und den des Trapezes mit A_t, so gilt

$$\begin{aligned} A_t &= 3A_d \\ A_g &= A_{k6} - A_d \\ A_m &= A_{k2} - A_g \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} A_m &= A_{k2} - A_{k6} + A_d \\ 3A_m &= A_t - 3(A_{k6} - A_{k2}) \end{aligned}$$

Es ist $A_{k6} = \frac{\pi r^2}{6}$ und $A_{k2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}$, d.h.

$$A_{k6} - A_{k2} = \frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\pi}{8}r^2 = \frac{\pi r^2}{24}$$

also $3(A_{k6} - A_{k2}) = \frac{\pi r^2}{8} = A_{k2}$. Folgende Gleichung gilt also:

$$A_t = 3A_m + A_{k2}$$

Die schwarze und die graue Fläche sind gleich groß.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 59-61

n ist entweder gleich 2000 oder gleich 3998.

Begründung: Falls keine zwei der n Geraden parallel sind, dann muss n gleich 2000 sein, da sich dann jede der Geraden mit allen übrigen Geraden schneidet.

Angenommen, zu einer der n Geraden gebe es $k \in \mathbb{N}$ parallele Geraden. Dann hat auch jede Gerade einer beliebigen anderen Richtung genau k zu ihr parallele Geraden. Anderenfalls stimmen die Anzahlen der Schnittpunkte beider Richtungen nicht überein. Also gilt $n = (k+1)(s-1)$, wobei s die Anzahl der verschiedenen Richtungen in der Geradenschar sei. Mit $n = 1999$ gilt $1999 = (k+1)(s-1)$. Da 1999 eine Primzahl ist, muss gelten $k+1 = 1999$, $s = 2$, also $n = 3998$.

Lösung 59-62

Es seien a und b die Längen der Katheten c die Länge der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks. Dann ist zu beweisen, dass

$$a + b \leq \sqrt{2}c$$

gilt.

Wegen $0 \leq (a-b)^2$ folgt

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &\leq (a-b)^2 + a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\ (a+b)^2 &\leq 2(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Nach Satz des Pythagoras ist die rechte Seite der letzten Ungleichung gleich $2c^2$, woraus die Behauptung folgt, da sowohl beide Seiten der Ungleichung, als auch die Größen a, b, c nichtnegativ sind.

Gleichheit gilt genau dann, wenn das Dreieck gleichschenklig ist. Die eine Richtung dieser Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz des Pythagoras mit $a = b$. Die andere Richtung zeigt man so:

Im rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen a, b und Hypothenusenlänge c gelte

$$a + b = \sqrt{2}c$$

Quadrieren dieser Gleichug und Anwenden des Satzes des Pythagoras ergibt

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= 2a^2 + 2b^2 \\ (a-b)^2 &= 0 \end{aligned}$$

woraus $a = b$ folgt.