

1 Vorschule

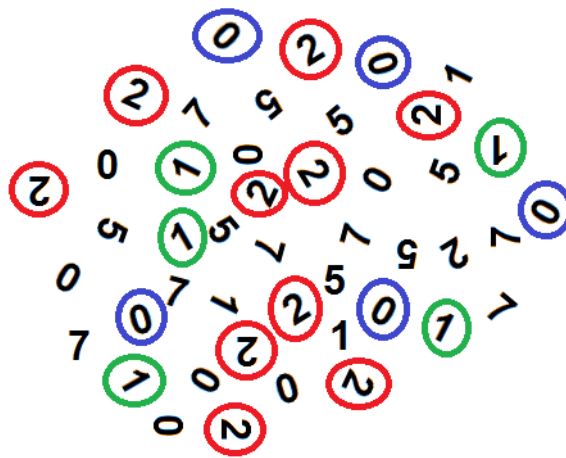
Lösung 84-11

Eine Uhr.

Lösung 84-12

Das Kind, das die wenigsten Schritte machen muss, macht die längsten Schritte: also macht Jarod die längsten Schritte.

Lösung 84-13



Lars kann 5 Mal die Jahreszahl 2012 legen.

2 Klassen 1 und 2

Lösung 84-21

Zu dieser Aufgabe gab es viele Lösungsmöglichkeiten. Eine davon ist diese:

$$10 + 4 - 4 = 10$$

$$3 + 2 + 3 = 8$$

$$9 - 2 - 2 = 5$$

Lösung 84-22

$$30 : 3 = 10$$

$$10 \cdot 10 = 100$$

Jeder braucht 100 Schollen.

Lösung 84-23

49 Teile $\cdot 3 = 147$ Teile

Lösung 84-24

Vorgänger		Nachfolger
999	1000	1001
gestern	heute	morgen
Mittwoch	Donnerstag	Freitag
April	Mai	Juni

3 Klassen 3 und 4**Lösung 84-31**

Wegen $A = 24 : H$ und $H = L \cdot L$ kann nur gelten $H = 1$ oder $H = 4$. Wäre $H = 1$, so müsste auch $L = 1$ sein, was aber verboten ist. Also muss $H = 4$ sein und damit $L = 2$ und $A = 6$. Dann ist $C = 3$ und $S = 12$. Wir haben also $S + C + H = 12 + 3 + 4 = 19$ und $L + A = 2 + 6 = 8$. Folglich muss $U = 19 - 8 = 11$ sein.

Der Buchstabe U steht für die 11. Es gibt nur eine einzige Lösung, weil sich mit $H = 4$ alles weitere zwangsläufig ergibt.

Zusatz: Wenn verschiedene Buchstaben auch für die gleiche Zahl stehen dürfen, dann könnte $H = 1$ und $H = 4$ sein und es gäbe 2 verschiedene Lösungen.

Lösung 84-32

Frau Sparsam braucht insgesamt 14 Kalender: je einen aus einem Schaltjahr für jeden möglichen Wochentag für den 01.01. und je einen aus einem normalen Jahr für jeden möglichen Wochentag für den 01.01.

Schreibt man die Wochentage der einzelnen Jahre ab 2011 (normale und Schaltjahre) für den 01.01. auf, so ergibt sich folgende Aufstellung:

Jahr	Wochentag 01.01.	Schaltjahr	kaufen	welcher Kalender passt?
2007	Mo	nein	nein	
2011	Sa	nein	ja	
2012	So	ja	ja	
2013	Di	nein	ja	
2014	Mi	nein	ja	
2015	Do	nein	ja	
2016	Fr	ja	ja	
2017	So	nein	ja	
2018	Mo	nein	nein	2007
2019	Di	nein	nein	2013
2020	Mi	ja	ja	
2021	Fr	nein	ja	
2022	Sa	nein	nein	2011
2023	So	nein	nein	2017
2024	Mo	ja	ja	
2025	Mi	nein	nein	2014
2026	Do	nein	nein	2015
2027	Fr	nein	nein	2021
2028	Sa	ja	ja	
2029	Mo	nein	nein	2007
2030	Di	nein	nein	2019
2031	Mi	nein	nein	2014
2032	Do	ja	ja	
2033	Sa	nein	nein	2011
2034	So	nein	nein	2017
2035	Mo	nein	nein	2007
2036	Di	ja	ja	

Die Jahre, für die Frau Sparsam Kalender kaufen muss, sind fett geschrieben. Im Jahr 2020 muss sie den letzten Kalender für ein normales Jahr kaufen - den Kalender für 2021. Anschließend muss sie nur noch für Schaltjahre einen Kalender kaufen und ist damit 2035 - mit dem Kalender für 2036- fertig. Sie muss insgesamt 13 Kalender kaufen.

Lösung 84-33

Da das Mädchen mit dem grünen Kleid neben dem Mädchen mit dem hellblauen Kleid steht und das Mädchen mit dem rosa Kleid neben dem Mädchen mit dem weißen Kleid steht, sind für die Kleidfarben nur zwei verschiedene Anordnungen möglich:

grün	rosa	oder	grün	weiß
hellblau	weiß		hellblau	rosa

(Wenn man in Tabelle 1 grün mit hellblau vertauscht, erhält man Tabelle 2 gedreht.)

Nach Aufgabe haben Galja oder Nadja das grüne Kleid an, aber da das Mädchen mit dem grünen Kleid neben Nadja steht, kann nur Galja das grüne Kleid tragen. Nadja trägt entweder das rosa oder das weiße Kleid, da sie dem Mädchen mit dem hellblauen Kleid gegenüber steht.

Walja trägt nicht das weiße Kleid und nicht das rosa Kleid (letzte Aussage im Aufgabentext), folglich also das hellblaue Kleid. Wir wissen jetzt also dies:

grün - Galja	rosa	oder	grün - Galja	weiß
hellblau - Walja	weiß		hellblau - Walja	rosa

Da Walja das hellblaue Kleid trägt, muss das Mädchen mit dem weißen Kleid neben dem Mädchen mit dem hellblauen Kleid stehen (letzte Aussage im Text). Nur die linke Anordnung ist daher noch möglich und es folgt (da Nadja und Walja einander gegenüber stehen müssen)

grün - Galja	rosa - Nadja
hellblau - Walja	weiß - Anja

Lösung 84-34

Da nichts näheres über das Papier mit Flächeninhalt 49 Kästchen ausgesagt ist, gibt es, wenn wir annehmen, dass es sich um ein Rechteck handelt, zwei Möglichkeiten:

- 1) Das Papier ist ein Quadrat mit Seitenlänge 7 Kästchen.
- 2) Das Papier ist ein 49 Kästchen langer Streifen der Breite 1 Kästchen (ein Rechteck).

zu 1)

Zwei (gegenüberliegende) Seiten der beiden Rechtecke haben ebenfalls die Seitenlänge 7, während sich die beiden anderen Seiten der beiden Rechtecke zu 7 ergänzen.

Da das eine Rechteck einen Umfang von 22 hat, müssen die beiden anderen Seiten dieses Rechtecks

$$(22 - 14) : 2 = 8 : 2 = 4$$

Kästchen lang sein. Das zweite Rechteck hat also die Seitenlängen 7 und 3, also einen Umfang von $14 + 6 = 20$ Kästchen.

zu 2)

Die Rechtecke sind ebenfalls 1 Kästchen breit. Die Länge des Rechtecks mit Umfang 22 Kästchen beträgt dann 10 Kästchen, die des anderen Rechtecks 39 Kästchen. Das zweite Rechteck hat also einen Umfang von $39 + 39 + 1 + 1 = 80$ Kästchen.

4 Klassen 5 und 6

Lösung 84-41

Der Dritte antwortet ebenfalls „Genau einer“

Begründung:

Angenommen, der erste Inselbewohner ist wahrheitsliebend. Dann müssen die beiden Begleiter Lügner sein. Das widerspricht aber der Antwort des zweiten Inselbewohners, der dann ja die Wahrheit gesagt hätte.

Daher muß der erste Inselbewohner ein Lügner sein.

Unter den beiden Begleitern ist somit mindestens ein Wahrheitsliebender.

Angenommen, der zweite Inselbewohner ist ein Lügner. Dann stimmt seine Antwort nicht, d.h. der dritte Inselbewohner muß ebenfalls ein Lügner sein. Das widerspricht aber der Antwort des ersten, der dann ja die Wahrheit gesagt hätte. Folglich kann der zweite Befragte kein Lügner sein. Der zweite Befragte sagt also die Wahrheit. Dann muss der dritte Inselbewohner ebenfalls wahrheitsliebend sein.

Lösung 84-42

Diese Aufgabe hat mehr als 1000 Lösungen! Hier ist eine von diesen:

8							D	
7								
6					D			
5				D				
4			D					
3								
2	D							
1								
	A	B	C	D	E	F	G	H

Lösung 84-43

4 Quaderkanten sind doppelt so lang wie die acht untereinander gleichlangen übrigen Kanten. Die Länge der kürzeren Kanten ergibt sich also zu $96 \text{ cm} : 16 = 6 \text{ cm}$.

Der Quader ist 6 cm lang, 6 cm breit und 12 cm hoch.

Probe: Länge aller Kanten =

$$6 \text{ cm} \cdot 8 + 12 \text{ cm} \cdot 4 = 48 \text{ cm} + 48 \text{ cm} = 96 \text{ cm}$$

Lösung 84-44

Da die Tausenderstelle der Summe nicht mit der Tausenderstelle des ersten Summanden übereinstimmen darf, muss es an der Hunderterstelle einen Übertrag geben. Bei 2 Summanden ist nur 1 als Übertrag möglich. Da die Summe kleinstmöglich sein soll, nehmen

wir an, dass die Kerze für die 2 steht, das Kreuz für die 1. Ferner nehmen wir an, dass die Sanduhr für die 0 steht, da sonst erst wieder 3 möglich wäre, was die Summe deutlich größer machen würde. Wir erhalten so als Summe 2012. Wenn wir dafür eine Belegung mit Ziffern für die noch nicht belegten Symbole finden, dann haben wir eine Lösung mit kleinstmöglicher Summe gefunden.

Für Stern und Glocke sind folgende Ziffern möglich: 3 und 9, 4 und 8, 5 und 7, jeweils in 2 verschiedenen Reihenfolgen. Bei 3 und 9 bzw. 9 und 3 erhält man jeweils an der Hunderter- oder Zehnerstelle des ersten Summanden einen Widerspruch. Für 4 und 8 erhalten wir eine mögliche Lösung:

$$1968 + 44 = 2012$$

Vertauschung von 4 und 8 ergibt einen Widerspruch an der Zehnerstelle des ersten Summanden (der gleich 2 sein müsste). Eine weitere Lösung erhält man mit 5 und 7:

$$1935 + 77 = 2012$$

Vertauschen von 5 und 7 führt zu einem Widerspruch an der Zehnerstelle des ersten Summanden (der ebenfalls gleich 5 sein müsste).

Es gibt also genau 2 Lösungen des Kryptogramms mit der kleinstmöglichen Summe 2012.

5 Klassen 7 und 8

Lösung 84-51

Es ist möglich, indem man zunächst dreimal vorbei wirft und anschließend einmal trifft. Das sieht man am einfachsten, indem man die 8019 Punkte in Faktoren zerlegt:

$$8019 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11$$

Nach dem ersten Fehlwurf hat man noch 9000 Punkte, nach dem zweiten noch 8100, nach dem dritten noch 7290 Punkte. Nach dem folgenden Treffer hat man dann genau 8019 Punkte.

Lösung 84-52

Es ist $n = 9$.

Begründung: Zunächst kann man die 1. und die 3. Aussage vereinfachen zu

(1*) n ist größer als 35.

(3*) n ist größer als 8.

Angenommen, (1) wäre wahr, dann wären auch (3), (4) und (5) wahr, d.h. mindestens 4 der Aussagen. Daher muß (1) falsch sein. Folglich ist (2) wahr. Angenommen, auch (3) wäre falsch, d.h. $n \leq 8$, dann wäre auch (4) falsch, d.h. bereits 3 der Aussagen wären

falsch. Daher muss (3) wahr sein. Somit ist auch (5) wahr. Folglich muss (4) falsch sein. Wir haben also

$$8 < n < 10$$

Die einzige natürliche Zahl, die diese Doppelungleichung erfüllt, ist 9.

Lösung 84-53

Die Mädchen essen mehr als die Jungen, da Maria mehr als Justus isst und Anna mehr als Simon.

Begründung : Es seien $a, m, j, s \in \mathbb{N}$ die Zahl der Kekse, die Anna, Maria, Justus bzw. Simon isst.

Dann gilt $s < a, j < m$. Wegen $s < a$ ist $s + j < a + j$. Wegen $j < m$ gilt $a + j < a + m$. Folglich ist $s + j < a + m$.

Lösung 84-54

Es sei a die Seitenlänge des Würfels. Dann ist das Volumen gleich a^3 , die Oberfläche gleich $6 \cdot a^2$. Da beide laut Voraussetzung gilt

$$a^3 = 6a^2$$

Diese Gleichung hat genau zwei Lösungen, nämlich $a = 0$ und $a = 6$. Im Falle von $a = 0$ handelt es sich um einen zum Punkt entarteten Würfel. Es ist daher anzunehmen, dass der Würfel die Kantenlänge 6 hat. Das gesuchte Volumen beträgt 216.

6 Klassen 9 bis 13

Lösung 84-61

13 Boote werden benötigt.

Begründung: Mitternacht befinden sich auf dem Weg von Moskau nach Astrachan 4 Boote, in Astrachan 2 Boote, auf dem Weg von Astrachan nach Moskau 5 Boote und in Moskau 2 Boote.

Lösung 84-62

Der Flächeninhalt des 8-Ecks ergibt sich aus der Differenz des Flächeninhalts des Quadrates (Seitenlänge a) und 4 gleichschenkelig rechtwinkliger Dreiecke mit der Basis y und den Schenkellängen x , bzw. zweier Quadrate mit Seitenlänge x , wobei

$$a = 2x + y$$

gilt. Nach Satz des Pythagoras haben wir

$$y^2 = 2x^2$$

und folglich

$$a = 2x + x \cdot \sqrt{2}$$

oder auch

$$x^2 = \frac{a^2}{(2 + \sqrt{2})^2}$$

Seien A_8 der Flächeninhalt des 8-Ecks, A_Q der Flächeninhalt des Quadrats, so ergibt sich:

$$\frac{A_Q}{A_8} = \frac{a^2}{a^2 - 2x^2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{(2+\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \approx 0,828$$

Die letzte Gleichung erhält man durch tapferes Umformen unter mehrfacher Anwendung 3. binomischen Formel.

Der Flächeninhalt des Achtecks beträgt also etwa 82,8% des Flächeninhalts des Quadrats.

Lösung 84-63

Da $f(x + g(y)) = 2x + y + 5$ linear in x und y ist, muss $g(y)$ unabhängig von x sein. Also muss $f(x) = 2x + r$ mit passendem $r \in \mathbb{R}$ sein. Damit ergibt sich

$$f(x + g(y)) = 2(x + g(y)) + r = 2x + 2g(y) + r,$$

so dass $2g(y) + r = y + 5$ sein muss. Hiermit rechnet man weiter

$$g(y) = \frac{1}{2}(y + 5 - r),$$

und unter Beachtung von $f(y) = 2y + r$ folgt

$$\begin{aligned} g(x + f(y)) &= g(x + 2y + r) \\ &= \frac{1}{2}((x + 2y + r) + 5 - r) \\ &= \frac{1}{2}(x + 2y + 5). \end{aligned}$$